

“五何”教学模式在高中数学概念课中的应用

——以“数学归纳法”为例

【摘要】

“五何”教学模式是在 4MAT 教学模式基础上演化而来,由“由何、是何、为何、若何、如何”五个“核心问题”为驱动的新型课堂教学模式.本文以概念教学为载体,《数学归纳法》为案例,呈现在课堂中应用“五何”教学模式,有效引导学生完成学习任务、建构知识体系,提升学科素养的实践.

【关键词】 概念教学 “五何”教学模式 数学素养

一、问题的提出

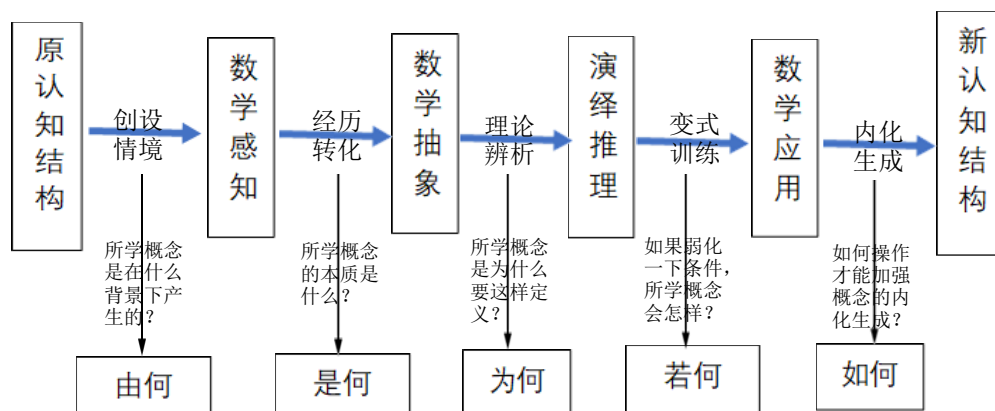
数学概念是构成数学定理、法则等的关键基础.概念的获得是学科知识内化的起点.因此正确理解数学概念,并且能够灵活使用,对于学生而言具有极其重要的现实意义.调研发现在“新课改”背景下,教师对概念教学的重视程度普遍较高,大多改变了以知识点的传授为主线,以教师讲授为主的课堂,启动了以“核心问题”为驱动的方式,将知识点的落实分解到各个核心问题当中,学生在解决“核心问题”的过程中就掌握了知识点、提升了能力.但在实施过程中,还存在以下问题,具体表现为:

教学问题设计的内容与形式大多集中于“这个概念是什么”,“这个概念怎样应用”,而对“这个概念是在什么背景下产生的”,“这个概念为什么要这样定义”类问题涉及不深,对启发创新思考的如“改变条件,概念是否会发生变化”这一类问题更缺乏深入的思考和实践.即普通的问题模式既缺乏能够促进进一步理解知识、促发认知迁移的深度,又缺乏满足不同层次学生认知水平的广度.

基于这些较为普遍的问题,构建以“由何、是何、为何、若何、如何”五个“核心问题”为驱动的符合学生的认知规律和学习规律的新型课堂教学模式.

二、“五何”教学模式

“五何”教学模式是在 Bernice McCarthy 的 4MAT 模式上拓展演化而来的.4MAT 中采用“四何”教学模式是由“是何、为何、如何、若何”这四个环节构成.华师大的祝智庭教授将“由何”引入到原有的“四何”教学模式中,形成了“五何”教学模式.笔者经过教学实践将“五何”教学模式在概念教学中的应用总结如下图:



1. “由何”诠释，即“由什么引出——情境引入”

“由何”环节指向一些建立学习此概念必要性的问题，即所学概念是在什么背景下产生的。其重要作用表现为，它可以作为情境的依附对象，强调与事物对象相关的各种情境要素的追溯与呈现。因此教师通常要创设情境，帮助学生积累数学感知经验。数学感知经验是指学生通过观察、操作、联想、猜测等活动，在看似没有数学的地方发现数学问题，在有数学的地方发现新的数学问题。

在教学中应结合概念的产生发展过程，创设能引导学生进行观察、猜测、验证、推理等数学活动的问题情境。其情境创设的素材可以源于生活，源于数学本身，源于其他相关学科等。同时，还应注重数学文化的熏陶和数学思想的渗透，培养学生的数学情感。

2. “是何”诠释，即“是什么问题——激发思考”

“是何”环节指向一些表示事实性内容的问题，即所学概念的本质是什么。其重要作用表示为，揭示定义、定理、规则、公式等事实性知识。因此教师要启发引导学生经历转化，积累数学抽象经验，归纳总结建构概念。具体可以有以下两个方面的转化：

(1) 现实情境与数学情境的转化。从学生已有的认知出发，通过情境创设建立起抽象概念和学生已有感性经验之间的联系。

(2) 文字语言、符号语言、图形语言之间的转化。通过寻找关键词，把文字语言准确概括为符号语言或图形语言，提高学生的数学语言表达、交流能力以及抽象思维能力。

3. “为何”诠释，即“为什么发生——深度思考”

“为何”环节指向一些表示目的、理由、原理、法则、定律和逻辑推理的问题，即概念为什么要如此定义。其重要作用表示为定义、定理、规则、公式等的推导及证明。因此教师的任务主要是通过问题导引、操作实践，有计划、有步骤地进行逻辑思维训练。

4. “若何”诠释，即“条件变更——探究思辨”

“若何”环节指向一些表示条件发生变化，可能产生新结果的问题，即如果弱化条件，已获得的概念会怎样。其重要作用表现为加深对于概念定义式的理解。因此教师在教学中可加强“理解性变式”，即内涵与外延的变式。即概念给出之后，不是直接应用概念解决问题，而是要深入挖掘概念的内涵与外延，理解概念的本质。这些针对外延与内涵设计辨析性问题，能够帮助学生快速、有效地理解概念本质。

5. “如何”诠释，即“内化新知——形成结构体系”

“如何”环节指向一些表示方法、途径与状态的问题，即如何操作才能加强概念的内化生成。其重要作用表现为应用概念。因此在教学中，教师应引导学生重视知识之间的内在联系，注重寻找因果关系，加强概念的内化过程，帮助学生降低应用时的错误率，积累概念应用的经验。

这个新型教学模式改变了以往教师主导的教学模式，设计起点改为从学生角度出发，考虑了学生对信息处理的整个流程，目的是使学生能够自主地对知识进行深加工，体现的是以学生为中心的思想，在不同环节满足了不同学习风格学生的需求。

三、实践案例“数学归纳法”教学片断

数学概念来源于生活，但对于学生来说要真正地理解它，弄懂数学概念的内涵还是较困难的，特别是对有关概念的深层次的挖掘与拓展就更加困难了。笔者注意到沪版新教材的数列这一章中在“数学归纳法”一节中讲述了多米诺骨牌的例子，短短的几句话不仅让学生

马上产生自己动手“玩”一下多米诺骨牌的想法，同时也能使学生产生强烈的求知与探究的欲望。以下截取“数学归纳法”的教学片断，呈现“五何”教学模式的运用。

片段 1：创设情境，提出问题

从一个装满球的袋子里摸出来的第一个是红球，第二个也是红球，第三个还是红球……

【师】根据前三个球都是红色，我就此判断袋子里的球都是红色，对吗？（问题 1）

【生】不一定. 因为只摸出了前三个，不能判断后面的情况.

【师】怎样才能判断袋子里的球都是红色呢？（问题 2）

【生】把袋子里的球一个一个拿出来看.

【师】刚才我们体验了不完全归纳和完全归纳. 如果已知三个球是红色推出其余球都是红色，这个结论不一定正确，这就是不完全归纳法. 那么为了得到正确的结论，我们需要完全归纳. 如果袋子里的东西是有限的，迟早可以把它摸完，由此可以归纳一个确定的结论.

——完全归纳法（一定正确）

如果袋子里的东西有无限个，我摸了很多个，都是红球，是否可以由此归纳出袋子里都是红球？（不一定）

——不完全归纳法（不一定正确）

【师】如果袋子里的东西是无限个，那么你有什么办法，判断袋子里的东西是否都是红球呢？（问题 3）

那就需要我们学习一种新的证明方法——数学归纳法.

“五何”	设计意图
由何	让学生知道不完全归纳的结论不一定正确.（问题 1）
由何	在有限的条件下如何运用不完全归纳法证明.（问题 2）
由何	从有限到无限，引起学生的思考学习新方法的必要性.（问题 3）

【设计说明】在“由何”这个教学环节，通过创设情境，让学生认识到“数学归纳法”这一过程性概念来源于生活实践经验或者学生认知的最近发展区，呈现概念的发现过程，为后续概念算法化打下基础. 在本节课中，通过生活中的“多米诺骨牌效应”让学生感受到从有限能够递推到无限所需要的两个充分条件，亲身经历数学科学方法的提炼过程，意识到方法来源于数学实践，也服务于生活，并得到生活的验证. 这一环节中，问题的探究过程有利于学生基于四基发展四能，在发展四能过程中，充分体现“推理素养”的过程性体验，因此具有明确的素养指向.

片断 2：探讨新知，形成概念

一列排好的直立骨牌，用手推倒第一块，第二块就被第一块推倒，第三块就被第二块推倒……

【师】观察多米诺骨牌全部倒下的过程，怎样才能保证所有骨牌都倒下？（问题 4）

【生 1】第一块骨牌要倒下；

【生 2】当某一块骨牌倒下时，紧随其后的一块也要倒下.

【师】对于骨牌个数是无限个，如果满足以上两个条件，是不是一旦都能倒下？（问题 5）

【生】可以.

“五何”	设计意图
是何	让学生在操作中思考,为了保证无数块骨牌都倒下,只要满足两个条件,从而揭示数学归纳法原理的直观背景. (问题 4)
若何	建立数学归纳法的初步模型. (问题 5)

【设计说明】在“是何”和“若何”这个教学环节,呈现概念算法化方法的探究过程,开展探索和师生之间的合作建构,逐步抽象为数学表达形式,不但使学生体会到知识的形成过程,而且体会到从特殊到一般的归纳方法,逐步形成过程性概念,并最终归纳推导出概念的程序化算法.在本节课中,笔者引导学生类比骨牌对具体数学情境问题进行证明,从证明过程中归纳出数学归纳法原理的算法化表达,然后设置问题串,抓住学生思维的起点,引领学生深入思考,逐层剖析,让学生明白第一步是证明奠基性,第二步是证明递推性,这样既突破了难点,又突出了重点.在这一环节中,问题梯度契合学生认知能力水平,逻辑清晰,因此具有明确的学习指向.

片段 3: 质疑思辨,完善概念

【师】通过多米诺骨牌的演示实验,你能抽象出用数学归纳法证明命题时的一般步骤吗? (问题 6)

【生】 $n=1$ 时,命题成立.

【师】“ $n=1$ 时,命题成立.”可以作为所有命题成立的初始条件吗? (问题 7)

【生】证明多边形内角和定理时就不对了,此时初始值 $n=3$.

【师】那我们可以把初始条件修改为 $n=n_0$ 时命题成立,这是证明过程的递推基础.此处对应了多米诺骨牌第一块倒下的情境.

【师】那么如何体现当任意一块骨牌倒下时,紧随其后的一块也要倒下? (问题 8)

【生】 $n=k$ 时命题成立,则 $n=k+1$ 时命题也成立.

【师】 k 有什么条件吗? (问题 9)

【生 1】 $k > n_0, k \in N^*$.

【生 2】 $k \geq n_0, k \in N^*$.

【师】是否取到等号的区别在哪里? (问题 10)

【生】一个递推关系不包括初始值,一个递推关系从初始值开始.

【师】很明显,为保证整个递推关系成立,必须取等号.

归纳:用数学归纳法证明一个命题对于从 n_0 开始的所有正整数 n 都成立:

(1) 证明 $n=n_0$ 时命题成立;(递推基础)

(2) 假设 $n=k$ ($k \geq n_0, k \in N^*$)时命题成立,证明 $n=k+1$ 时命题也成立;(递推依据)

(3) 由(1)(2)可得,对任意的 $n \in N^*$,命题都成立.

概念辨析

辨析 1: 下面是某同学用数学归纳法证明命题

$2+4+6+\dots+2n=n^2+n+1$ ($n \in N^*$) 的过程.

证明: 假设当 $n=k$ ($k \in N^*$) 时, 等号成立, 即 $2+4+6+\dots+2k=k^2+k+1$.

则当 $n=k+1$ 时,
$$\begin{aligned} 2+4+6+\dots+2k+(2k+2) &= k^2+k+1+(2k+2) \\ &= (k+1)^2+(k+1)+1 \end{aligned}$$

即当 $n=k+1$ 时, 等式也成立.

根据 (1) 和 (2) 知, 对于一切 ($n \in N^*$), 等式成立.

你认为他的证明过程正确吗? 为什么? (**问题 11**)

【生】 不正确, 因为缺少第一步, 不符合数学归纳法的要求.

辨析 2: 下面是某同学用数学归纳法证明命题

$1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$ ($n \in N^*$) 的过程.

证明: (1) 当 $n=1$ 时, 左边=1, 右边=1, 等式成立;

(2) 假设当 $n=k$ ($k \in N^*$) 时, 等式成立, 即 $1+3+5+\dots+(2k-1)=k^2$

则当 $n=k+1$ 时, $1+3+5+\dots+(2k-1)+(2k+1)=\frac{[1+(2k+1)](k+1)}{2}=(k+1)^2$

即当 $n=k+1$ 时, 等式也成立.

根据 (1) 和 (2) 知, 对于一切 ($n \in N^*$), 等式成立.

你认为他的证明过程正确吗? 为什么? (**问题 12**)

【生】 不正确, 因为第二步没有用归纳假设, 也不符合的数学归纳法的要求.

“五何”	设计意图
如何	通过对实际操作中对数学归纳法原理的理解, 展开数学抽象, 归纳“再创造”出数学归纳法原理. (问题 6)
为何	正确表述数学法的第一步. (问题 7)
如何	探求数学归纳法成立的第二步骤. (问题 8)
是何	使证明的过程更加严密. (问题 9)
是何	让学生真正理解递推的依据. (问题 10)
若何	通过对证明题的证明过程的辨析, 进一步明确数学归纳法的两个步骤缺一不可. (问题 11, 12)

【设计说明】 在“若何”这个教学环节, 通常设置变式练习或者概念过程辨析, 完善概念的算法化, 提升学生的逻辑推理素养. 在本节课中, 通过学生运用数学归纳法证明等差数列的通项公式的反例辨析, 检查学生对数学归纳法的理解程度, 学生在解决问题的过程中会出现各种各样的错误, 此时教师恰好利用这些错误帮助学生进一步深刻理解数学归纳法的本质,

突出数学归纳法的算法化步骤.这一环节中,充分突出了“数学归纳法”所具有的明确的结构指向.

四、实践反思

1、在概念课中,基于“五何”教学模式的多层次提问可由浅入深地引导学生明确重要概念的直观表述、阐释重要概念的内在原理、探究重要概念的实现途径、解释重要概念的现实意义、联系重要概念的开放情境,从而逐步构建重要概念,帮助学生建构合理的知识框架,提升课堂教学效果.

2、在概念课中,教师的问题设计模式都应该为本节课的核心概念服务,如有的概念课侧重于“由何”,有的概念课侧重于“为何”,所以应用“五何”问题模式设计出的问题在一节课中不一定都要出现,可能某节课只用到了“二何”或者“三何”,也可能是某“一何”的反复应用,因此“五何”问题的选择与应用一定要结合实际教学内容.

3、在概念课中,如何将教材内容转化为一个个能启发学生层层递进、深入思考的问题模式是个难点.笔者认为祝教授的“五何”教学模式是实现这一转化的好抓手,可以帮助教师在设计问题时将概念课的各个环节结构化,为老师们课堂中的有效设问提供了很好的思维上的“脚手架”.而且对于学生而言,在结构化问题模式的有序引领下,能激发学生的学习内动力,锻炼有序思考问题和解决问题的能力,是一种值得继续在“命题教学”和“解题教学”等课型中不断完善和探索的教学模式.

参考文献:

- ① 骆文娟. “五何”问题支架在数学教学中的应用. 江西教育[J], 2019-3-05
- ② 章建跃. 数学概念的获得. 数学通报[J], 1990-11-27
- ③ 李良玉, 泮桂秋. “四何”问题设计引导高阶思维训练. 基础教育课程[J], 2017-3-15
- ④ 胡小勇. 问题化教学设计——信息技术促进教学变革[M]. 北京: 教育科学出版社, 2006